8 - Дәріс

Тақырыбы: **Көп айнымалылы функциялар. Анықталу жиыны. Көп айнымалы функцияның шегі және үзіліссіздігі.**

Анықтама. *Реттелген* (x, y) нақты сандар жұбтарының D және $E \subset R$ жиындары берілсін. *Егер әрбір* $(x, y) \in D$ *сандар жұбына жалғыз* $z \in E$ *санын сәйкес қойатын* f ережесі D жиынында берілген екі айнымалылы функция деп аталады және ол $z = f(x, y)$, немесе $f : D \to E \subseteq R$ *деп жазылады.*

D жиыны функцияның ***анықталу жиыны*** деп аталады.

Екі айнымалылы функция ***кесте*** немесе ***аналитикалық*** тәсілмен ***формула*** арқылы берілуі мүмкін.

Екі айнымалылы функция анықтамасын үш немесе одан да көп айнымалылар үшін жалпылауға болады.

Анықтама. Егер әрбір $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ *нүктесіне қандай да бір анықталған* $f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *нақты саны сәйкес қойылса, онда* D *жиынында* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - n-***айнымалылы***

$$f : D \subseteq R^n \to R$$

сандық функциясы *берілді дейді.*

D жиыны $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясының **анықталу жиыны**, ал

$$E = \{w \in R : \quad w = f(P), \quad P \in D\} \subseteq R^n$$

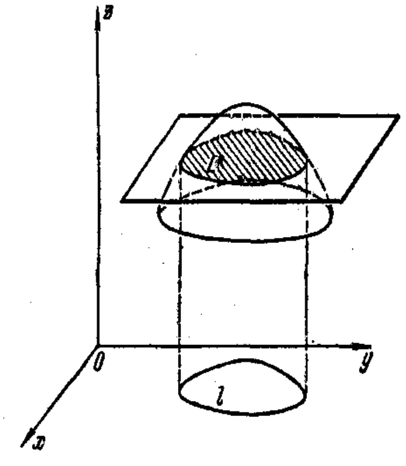
жиыны оның **мәндер жиыны** деп аталады.

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, w) = 0$ жазуы $x_1, x_2, \ldots, x_n, w$ айнымалыларының арасында функциялық байланыс бар екенін жалпы түрде көрсетеді, яғни осы шамалардың қандай да біреуі, мысалы w, қалғандарының **айқын емес функциясы** екенін білдіреді.

Екі айнымалы сандық функцияны R^3 кеңістігінде бейнелеуге болады.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының графигі деп үш өлшемді кеңістіктің $(x, y, f(x, y))$ нүктелерінен құрылған жиын аталады.($(x, y) \in D$-анықталу жиыны)

Жалпы алғанда $z = f(x, y)$ функциясының графигі R^3 кеңістігі қайсы бір бет болады. Мысалы $z = 1 - x - y$ функциясының графигі жазықтық болып табылады.



Тұрақты мәнді, x, y тәуелсіз айнымалыларының біріне емес, z функциясының өзіне бере отырып, $z = f(x, y)$ функциясын зерттеуге болады. Егер $z = z_0$ деп алсақ, онда

$$f(x, y) = z_0 \tag{1}$$

теңдеуі z функциясының тұрақты z_0 мәнін сақтай отырып x пен y айнымалыларының арасындағы тәуелділікті береді.

Бұл жағдайда $z = f(x, y)$ беті мен OXY-ке параллель $z = z_0$ жазықтығының L қиылысу сызығын аламыз (1 - сурет).

OXY жазықтығында (1) теңдеу $f(x, y) = 0$ түріне ие болды және бұл теңдеу L сызығының OXY-жазықтығындағы ℓ проекциясын анықтайды. Координаталары x, y болатын нүкте ℓ қисығының бойымен қозғалғанда, z функциясы тұрақты z_0 мәнін сақтайды.

Анықтама. $z=f(x,y)$ функциясының мәні С санына тең болатын барлық $(x,y)\in D$ жұптарынан құрылған жиын деңгейлік сызық деп аталады.

Мысалы, $z=x^2+y^2-9y$

С деңгейіне: $x^2+y^2-6y=C$

немесе: $x^2+(y-3)^2=C+9$

а) С <-9 үшін деңгейлік сызық бос жиын.

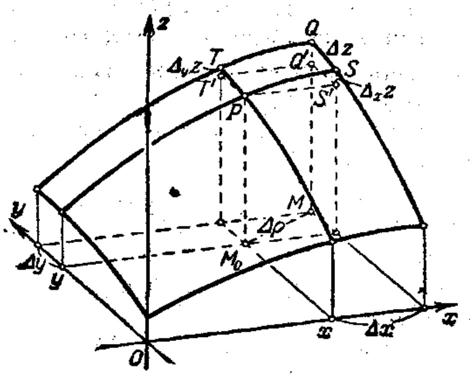
б) С>-9 үшін деңгейлік сызық OXY жазықтығында жатқан, радиусы $\sqrt{C+9}$, центрі (0,3) нүктесі болатын шеңбер

в) с= -9 үшін деңгейлік сызық (0,3) нүктесі.

Қолданбалы ғылымда деңгейлік сызықты екі айнымалылы функциясының графигін көз алдымызға елестету үшін жиі қолданады. Мысалы, жер нүктесінің теңіз деңгейінен биіктігін екі айнымалылы функция ретінде қарастырып, картаға осы функцияның деңгейлік сызықтарын салады. Оларды топографияда **горизонтальдар (жатық сызықтар)** деп атайды. Жатық сызықтардың орналасуына қарай жер биіктігінің өзгеруін көруге болады.

Екі айнымалы функциясының дербес және толық өсімшелері. Шек және үзіліссіздік

$z=f(x,y)$ функциясы берілсін. Егер y аргументіне тұрақты y_0 мәнін беріп тек x-ті ғана өзгертіп отырсақ, онда z тәуелсіз бір айнымалылы x-тің функциясы болар еді: $z=f(x,y_0)$ Бұл функцияға бір айнымалылы функцияны зерттеудің белгілі әдістерін қолданып, z айнымалының x (ке тәуелді өзгеру сипатын ала аламыз: $z=f(x,y)$ беті мен OXZ (ке параллель $y=y_0$ жазықтығының қиылысу сызығы PS болады. (2-сурет).Айнымалы х- ке Δx өсімшесін берейік.



2 - сурет

Онда оған сәйкес z-те өсімшеге ие болады. Оны **z-тің x бойынша дербес өсімшесі** дейді де $\Delta_x z$ арқылы белгілейді (2-суретте $\Delta_x z = SS'$ кесіндісі болады):

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Осы сияқты x-ке тұрақты x_0 мәнін беріп z-тің y (ке тәуелді өзгеру сипатын алуға болады: $z=f(x,y)$ беті мен OYZ-ке параллель $x=x_0$ жазықтығының қиылысу сызығы. y-ке Δy-өсімшесін берсек, онда z функциясы **y бойынша $\Delta_y z$ дербес өсімшеге** ие болады (2-суретте $\Delta_y z = TT'$ кесіндісі)

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Ал егер x пен y аргументтеріне сәйкес Δx және Δy өсімшелерін берсек, онда z үшін жаңа Δz өсімшесін аламыз. Ол z **функциясының толық өсімшесі** деп аталады:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

(2-сурет бойынша $\Delta z = QQ$ кесіндісі болды)

Жалпы жағдайда толық өсімше дербес өсімшелердің қосындысына тең емес:

$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Ескерту. $n \geq 3$ *айнымалылы функциясының толық және дербес өсімшелері осы сияқты анықталады.*

$P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің* δ *-маңайын анықтаймыз:*

Анықтама. Координаталары $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ **теңсіздігін қанағаттандыратын барлық** $P(x,y)$ **нүктелер жиынын** P_0 *нүктесінің* δ *маңайы деп атайды және* $U_\delta(P_0)$ *символымен белгілейді.*

Анықтама. $f(x,y)$ *функциясы* $P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің қандай да бір* $U_\delta(P_0)$ *маңайында анықталған болсын, оның* $P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің өзінде анықталмауы да мүмкін, яғни* $x \neq x_0$ *немесе* $y \neq y_0$.

Егер әрбір $\varepsilon > 0$ саны арқылы $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $P(x,y)$ нүктелері үшін

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

шарты орындалатындай $\delta > 0$ ***саны бар болса,*** онда A ***саны*** f ***функциясының*** P_0 ***нүктесіндегі шегі*** деп аталады да

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \text{ немесе } \lim_{P \to P_0} f(P) = A \qquad (2)$$

деп жазылады.

n -тәуелсіз айнымалылы функциясының шегі де дәл осылай анықталады.

Анықтама. *Егер* $f(P) = f(x,y)$ *функциясы* $P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінің қандайда бір маңайында және осы* $P_0(x_0, y_0)$ *нүктесінде анықталып*

$$\lim_{P_{zz} \to P_0} f(P) = f(P_0) \qquad \textit{немесе} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (3)$$

теңдігі орындалса, онда $f(P) = f(x,y)$ ***функциясы*** $P_0(x_0, y_0)$ ***нүктесінде үзіліссіз*** *деп аталады.*

Егер $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ деп алсақ, онда (3) теңдікті

$$\lim_{\substack{\Delta x \to x_0 \\ \Delta y \to y_0}} f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

немесе

$$\lim_{\substack{\Delta x \to x_0 \\ \Delta y \to y_0}} \left[f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 \qquad (4)$$

түрінде де жазуға болады. Бұл теңдік (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз функцияның осы нүктедегі шегі функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі мәніне тең болатынын көрсетеді.

Егер $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ деп алсақ, онда

$$(\Delta\rho \to 0) \Rightarrow (\Delta x \to 0 \text{ және } \Delta y \to 0)$$

(2-суретте $\Delta\rho = \mu_0\mu$ кесіндісі болады)

және, керісінше

$$(\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0) \Rightarrow \Delta\rho \to 0.$$

Олай болса (4) теңдігін

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0, \quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{5}$$

түрінде жазуға болады.

D жиынының әрбір нүктесінде үзіліссіз болатын **функция** D жиынында **үзіліссіз** деп аталады.

Шектің қасиеттерінен: $P_0(x_0, y_0)$ нүктесінде үзіліссіз $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ функцияларының қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі және $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ болса бөліндісі үзіліссіз функция болатыны шығады.

1-ескерту. Екі айнымалылы функцияның үзіліс нүктелері тұтас сызықтарды құрауы да мүмкін.

2-ескерту. Айнымалылары кез келген сан болатын функция үзіліссіздігі де дәл осы сияқты анықталады.